LinAlg PVK HS19 13.01.20

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

i) $a_{21} = 0$

ii) $\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

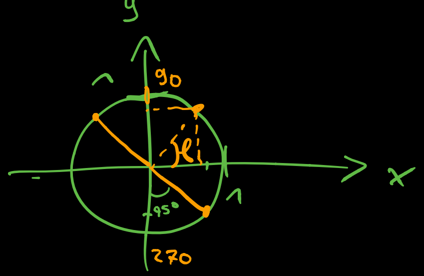
Allg: $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ $\underset{a_{31}}{}$ $\quad G = \begin{bmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{bmatrix}$

iii) $\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{\overset{!}{=} 0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T$

iv) $\Rightarrow \cos\varphi = -\sin\varphi$

$\Rightarrow \varphi = \underline{135°}$ oder $\underline{\underline{315°}}$



$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

v) $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \underline{\underline{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

vi) Falls $A > 2 \times 2$

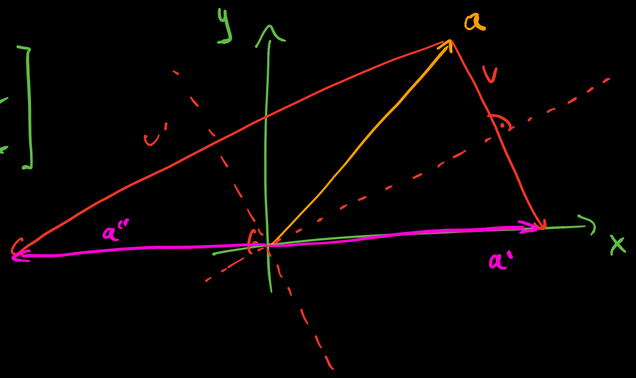
i) - v) nochmals

$$\rightarrow \quad G_2 \underbrace{(G_1 \cdot A)}_{R'} = R \qquad \Rightarrow \quad Q = (G_2 \cdot G_1)^T$$

$$= G_1^T \cdot G_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$



i) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $a' = \|a\| e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = a \boxed{\pm} a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\|a\| = 3$

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T = I - 2uu^T \quad \Big| \; u = \frac{v}{\|v\|}$$

iii) $u = \frac{v}{\|v\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\|v\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$

iv) $H = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [5\ 2\ 1]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$$

v) $H \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & ☆ & ☆ \\ 0 & ☆ & ☆ \\ 0 & ☆ & ☆ \end{bmatrix}$ Spiegelung auf Raum anwenden

vi) Mehrere Möglichkeiten:

1. i)-v) für 2. Spalte mit $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow H_2$

$\Rightarrow H_2(H_1 A) = R$

7. Betrachte Untermatrix

i) - v) auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2'$

$$\Rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{H_2'}} \\ 0 & & \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \underline{H_2 (H_1 A) = R}$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{A \in V \mid A^T = -A\}, \ V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\forall U_1, U_2 \in U, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $(U_1 + U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2$

$= -(U_1+U_2)$ ✓

ii) $(\alpha \cdot U_1)^T = U_1^T \alpha^T = \alpha U_1^T = -\alpha U_1$ ✓

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis beweisen:

Beispiel: $\mathcal{P}_2$, $C = \{c^{(1)} = 2, c^{(2)} = x^2+x+1, c^{(3)} = 2x^2-5x\}$

$B = \{b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x, b^{(3)} = x^2\}$

1)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} - c^{(1)}}{7} \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} - \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

C ist ES & minimal darin, da 3 Vektoren für 3 Dim.

=> **Basis**

2)

$$\begin{array}{ccc|c} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} & \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

rank 3

=> lin. unabh.

=> ES & minimal

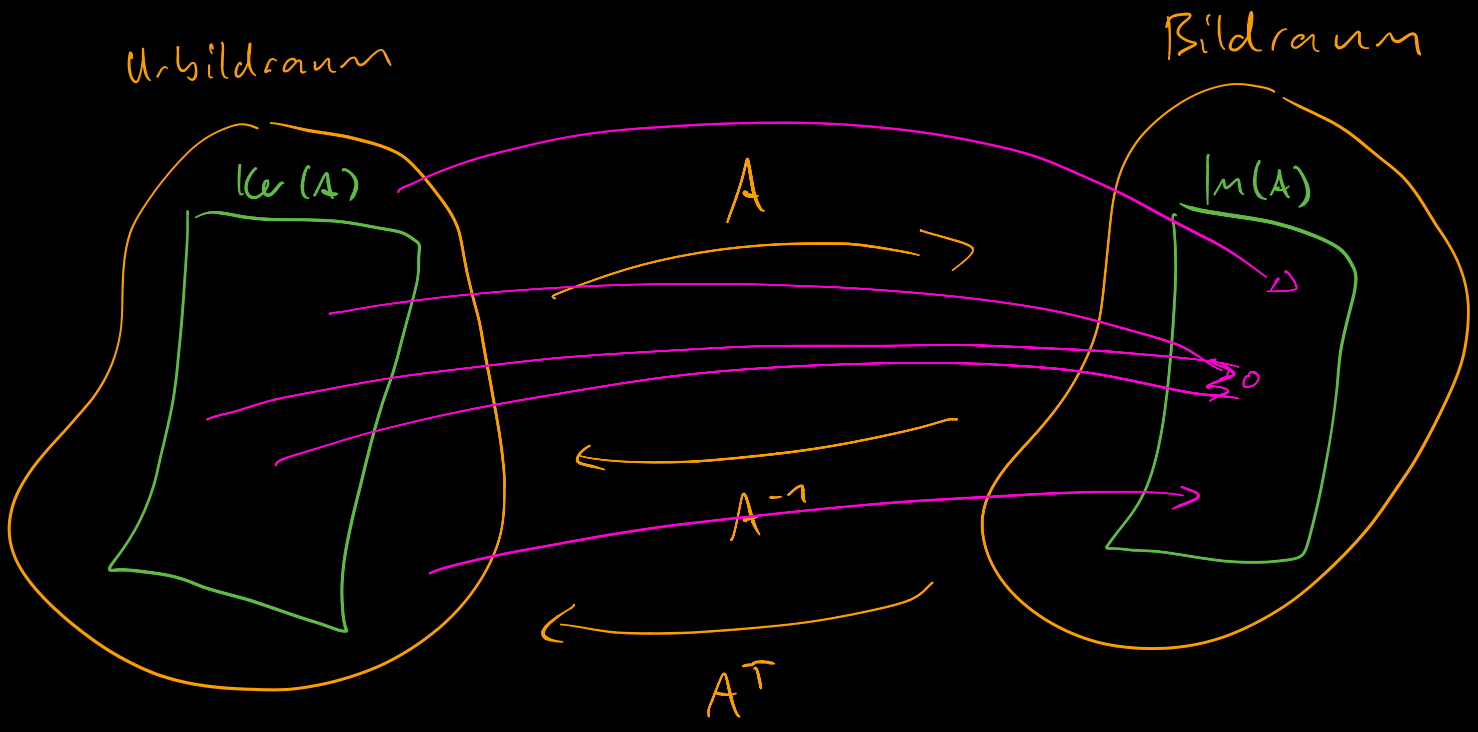
=> **Basis**

Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a^{(2)} \\ | \end{bmatrix} \dots$$



Ker(A):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$x_4 = s \in \mathbb{R}$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = \frac{3s - 3t}{2}$

$x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2}$

$= \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}s$

$= \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$

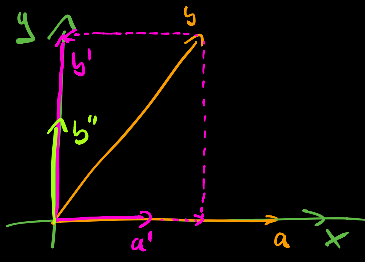
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: P_4 mit $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$, $\text{span}\{1, 3x^4\}$

i)
$$e^{(1)} = \frac{1}{\|1\|} = 1$$

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = 1$$

ii)
$$e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle \cdot 1$$
$$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\,dx = 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\,dx}$$
$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Verallgemeinerte Norm:

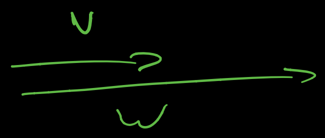
$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R} \ , \ v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ positive Definitheit

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung



Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \ , \ (a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$= \underline{\lambda \langle x,y \rangle + \lambda \langle x,z \rangle}$

$\langle \lambda x, \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle x,y \rangle$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

(ii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(iii) $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ positive definitheit

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a,a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $\langle x,y\rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\forall x,y,z \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\langle x, \alpha(y+z)\rangle_A = \alpha\langle x,y\rangle_A + \alpha\langle x,z\rangle_A$

$$x^T A(\alpha(y+z)) = \alpha x^T A y + \alpha x^T A z = \alpha\langle x,y\rangle_A + \alpha\langle x,z\rangle_A$$ ✓

ii) $\langle x,y\rangle_A = \langle y,x\rangle_A = y^T A x$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x$$ ✓

iii) $\langle x,x\rangle_A \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^T A x \geq 0$ $\quad$ $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow$ A pos. definit, Alle EW von A > 0

Hurwitz-Kriterium:

$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $\det(2) = 2 > 0$ ✓

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$ ✓

$\Rightarrow$ A pos. def. $\Rightarrow$ ✓

A^k - Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I}\dots\underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^kT^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= T \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & d_2^k & \\ 0 & & d_3^k \end{bmatrix} T^{-1} x$$

$$= T D^k \underbrace{T^{-1} x}_{z}$$

$z = T^{-1}x$

$Tz = x$

$$= TD^k z$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x\,?$$

EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0$, $= \det\begin{bmatrix} \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{-2} & \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{2-\lambda} \end{bmatrix}$

$$= -\lambda \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2-2\lambda-2\right] + 2\left[2\lambda-4+2\right] + \left[2\lambda+4\right]$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2-2\lambda-2\right] + 6\lambda = -\lambda\left[\lambda^2\underbrace{-2\lambda}_{+}\underbrace{-8}_{\cdot}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+2)$$

$\lambda_1 = \underline{0}$, $\lambda_2 = \underline{-2}$, $\lambda_3 = \underline{4}$

EV: $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$= \left\{ s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_2 = -2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_{-2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda_3 = 4: \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_3 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{D = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & 4 \end{bmatrix}}, \quad \underline{T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^{10}x = TD^{10}z \qquad Tz = x$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^{10} & & 0 \\ & (-2)^{10} & \\ 0 & & 4^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1024 & \\ 0 & & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{At} y_0$$

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \quad . \; - \; - \\ y_3' &= a_{31} y_1 \quad . \; . \; - \; - \end{aligned}$$

gekoppelt

$$y' = Ay = TDT^{-1} y$$

$$\underbrace{T^{-1} y'}_{z'} = D \underbrace{T^{-1} y}_{z} \qquad Tz = y$$

$$z' = Dz$$

$$\begin{aligned} z_1' &= d_1 z_1 \\ z_2' &= \qquad d_2 z_2 \\ z_3' &= \qquad\qquad d_3 z_3 \end{aligned}$$

entkoppelt

Euler-Ansatz

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{d_1 t} c_1 = e^{\lambda_1 t} c_1 \\ z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} c_2 \\ z_3(t) &= e^{\lambda_3 t} c_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = e^{Dt} z_0 \qquad \Big| \; z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = T\, z(t) = T\, e^{Dt} z_0 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ t^{(1)} & t^{(2)} & t^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \emptyset & & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(3)} \\ | \end{bmatrix}}}$$

Beispiel:

a) $$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

b) AWP: $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) EW: $$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} \overset{+}{-6-\lambda} & \overset{\downarrow}{\overset{-}{0}} & 2 \\ -9 & \overset{+}{3-\lambda} & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[\underbrace{(\lambda+6)(\lambda-3)}_{-18} + 18 \right]$$

$\lambda_1 = \underline{3}$

$\lambda_2 = \underline{0}$

$\lambda_2 = \underline{-3}$

$6 \cdot (-3)$

$(-6) \cdot 3$

$3 \quad -6 \leftarrow$

$-3 \quad 6$

EV: $\underline{E_3 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$, $\underline{E_0 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$

$\underline{E_{-3} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

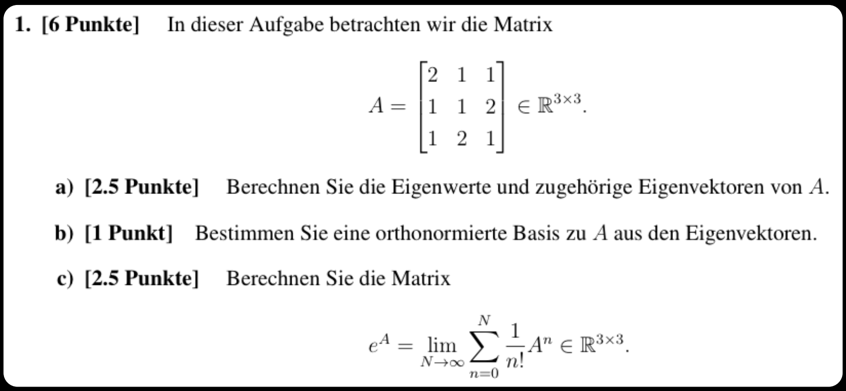
b) AWP: $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y(0) = ?$

$\Rightarrow \underline{c_1 = 0}$, $\underline{c_2 = 1}$, $\underline{c_3 \in \mathbb{R}}$ $\qquad y_0 = T z_0$

$$\underline{y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

Prüfung HS18:



1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{T D^n T^{-1}}{n!}$$

$$= T \Big(\underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{D^n}{n!}}_{D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6} + \dots} \Big) T^{-1}$$

$$\left(= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 \ddots & \\ \emptyset & & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \emptyset \\ & \frac{d_2^2}{2} & \\ \emptyset & & \ddots \end{bmatrix} + \dots \right)$$

$$\left(= \begin{bmatrix} \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{d_1^n}{n!} & & \emptyset \\ & \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{d_2^n}{n!} & \\ \emptyset & & \ddots \ \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{d_n^n}{n!} \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ \emptyset & & \ddots \ e^{d_n} \end{bmatrix} = e^P \right)$$

$$= T e^D T^{-1}$$

a)

$$EW: \det(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[1 - \lambda - 2\right] + \left[2 + \lambda - 1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\Big[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{\overset{!}{=} 6} - 6\Big]$$

$3 \cdot 2$

$-2 \quad -3$

$\lambda_1 = \underline{1}$

$\lambda_2 = \underline{\underline{-1}}$

$\lambda_3 = \underline{\underline{4}}$

EU: $(A-\lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_1 = 1: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) $\mathcal{B} = \{E_1, E_{-1}, E_4\}$

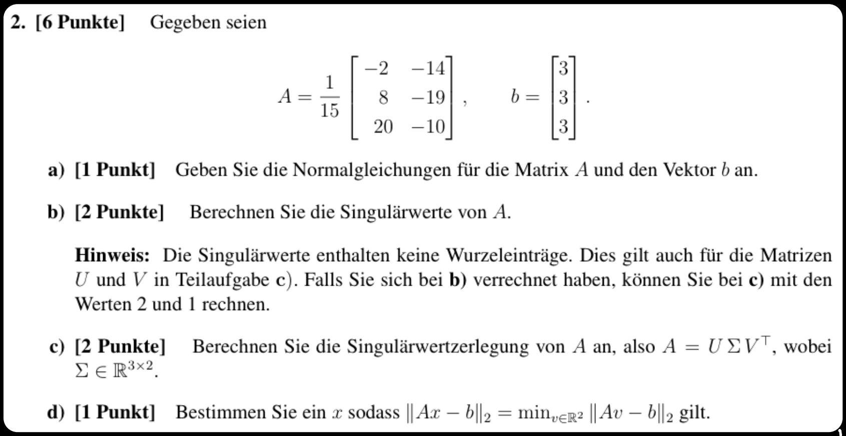
$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $e^{A} = T e^{D} T^{-1} = T e^{D} T^{T}$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e & e & e \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^{4} & -2e + 2e^{4} & -2e + 2e^{4} \\ -2e + 2e^{4} & -2e + 3e^{-1} + 2e^{4} & -2e - 3e^{-1} + 2e^{4} \\ -2e + 2e^{4} & -2e - 3e^{-1} + 2e^{4} & -2e + 3e^{-1} + 2e^{4} \end{bmatrix}$$



2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

$Ax = b$ $\quad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$

$USV^T x = b$

$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

$\hat{S} V^T x = d_0$

$x = V \hat{S}^{-1} d_0$

U, V orth.

$S = \text{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{\sigma_i})$, λ_i von A^TA o. AA^T

U: EV von AA^T

V: EV von $\boxed{A^TA}$ ←

$u^{(i)} = \frac{Av^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$ ←

$v^{(i)} = \frac{A^Tu^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

a) $\underline{\underline{A^TAx = A^Tb}}$

b)

$$V: A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW: } \det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (52-25\lambda)(73-25\lambda) - 36^2 \overset{!}{=} 0$$

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

$\lambda = 0: \; 52 \cdot 73 \; \lightning$

$\lambda = 1: \; 27 \cdot 48$

$3\cdot3\cdot3 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$

$\lambda_1 = \underline{1}$

$\lambda_2 = \underline{9}$

$\lambda = 4: \left(-48\right)\left(-27\right)$

$$\underset{\sqrt{\lambda_2}}{\sigma_1 = \underline{\underline{2}}} \quad , \quad \underset{\sqrt{\lambda_1}}{\sigma_2 = \underline{\underline{1}}}$$

c) $$S = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \Big\} \hat{S}$$

Auch möglich: $$S = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \Big\} \hat{S}$$

V: EV: $(A^T A - \lambda I)\, x \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_1 = 4: \quad \left.\begin{array}{cc} -48 & -36 \\ -36 & -27 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \left.\begin{array}{cc} -48 & -36 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4} s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \left.\begin{array}{cc} 27 & -36 \\ -36 & 48 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \left.\begin{array}{cc} 27 & -36 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3} s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_1 = \text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{Av^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix}-2 & -14\\ 8 & -19\\ 20 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix}-50\\-25\\50\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1\\-2\\-2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-6\\6\\-3\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}}}$$

d)

$$Ax = b$$

$$USV^T x = b$$

$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix}d_0\\d_1\end{bmatrix}$$

$$x = V\hat{S}^{-1} d_0$$

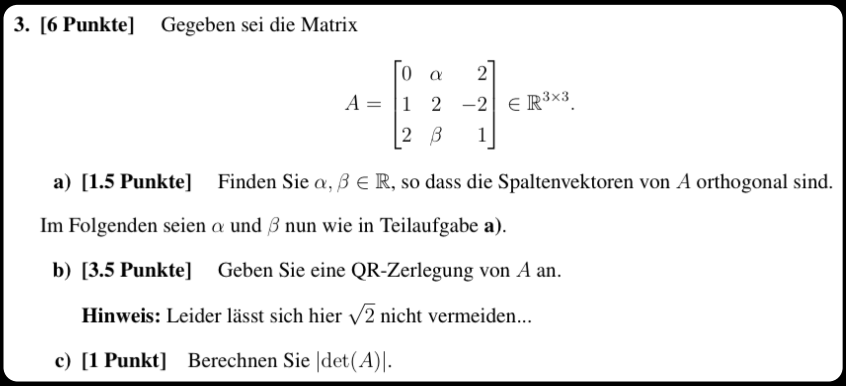
$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\}d_0\\ \\ d_1\end{matrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Auch möglich? $\hat{S} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$x = V\hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\-13\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7\\-26\end{bmatrix}}$$



3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\underline{\underline{\beta = -1}}$, $\alpha = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

b)

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & & 0 \\ & \frac{\sqrt{45}}{2} & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}}}$$

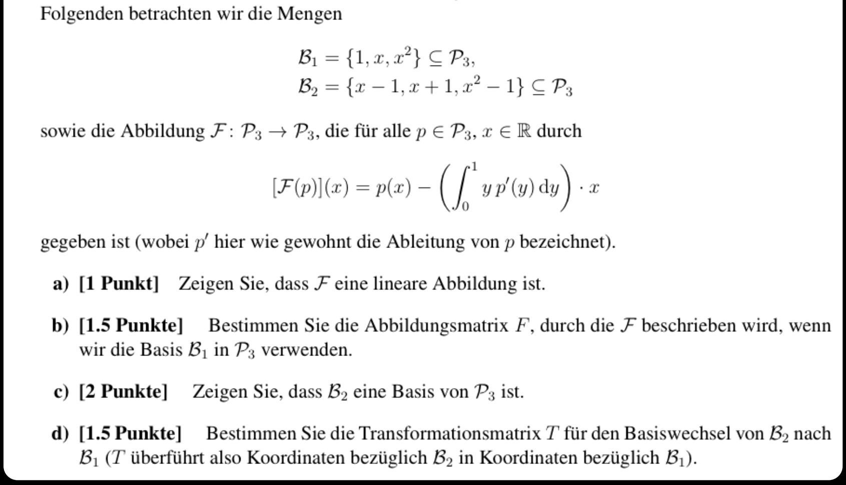
$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c)

$$|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \det R|$$

$$= |\det(R)|$$

$$= \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$$



4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

- **a) [1 Punkt]** Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.
- **b) [1.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.
- **c) [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.
- **d) [1.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da:

$$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3 \quad , \quad \mathcal{F}(x) = \underline{\tfrac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right)\cdot x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 2y^2\,dy\right)\cdot x$$
$$= x^2 - \left[\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = \underline{x^2 - \tfrac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

Beweisen Linearität:

$\forall a,b \in \mathcal{P}_3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

überprüfen i) & ii):

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) = (a(x)+\alpha b(x)) - \left(\int_0^1 y\,[a(y)+\alpha b(y)]'\,dy\right)\cdot x$$
$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y a'(y) + \alpha y b'(y)\,dy\right) x$$
$$= a(x) + \alpha b(x) - \int_0^1 y a'(y)\,dy\, x - \int_0^1 \alpha y b'(y)\,dy\, x$$
$$= a(x) - \int_0^1 y a'(y)\,dy\, x + \alpha\left(b(x) - \int_0^1 y b'(y)\,dy\, x\right)$$
$$= \mathcal{F}(a) + \alpha\, \mathcal{F}(b)$$

b)

$$1 \xrightarrow{F} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

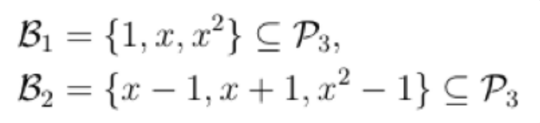
$$x \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x = 0\cdot 1 + \frac{1}{2}x + 0x^2$$

$$x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x = 0\cdot 1 - \frac{2}{3}x + 1x^2$$

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"] & P_3 \arrow[d, "k_x"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)



$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$

$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$

$b^{(1)}$ $b^{(2)}$ $b^{(3)}$

1)

$$1 = \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$$

$$x = \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2}$$

$$x^2 = b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$$

ES & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ Basis

2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rank} = 3$$

$\Rightarrow$ B_2 ist lin. unabh. $\Rightarrow$ Basis

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x+1 &= 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x^2-1 &= -1\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \end{aligned}\right\} T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

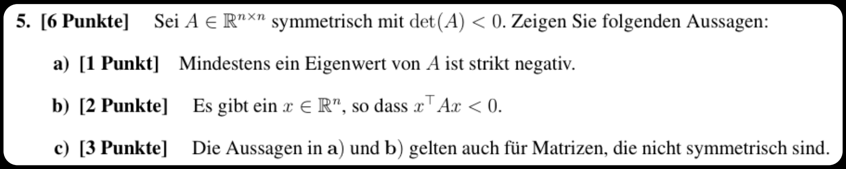
$$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x-1 =$$

$$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x+1 =$$

$$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2-\frac{2}{3}x-1 =$$

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"] & P_3 \arrow[d, "k_x"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\ B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[r, bend left=60] \arrow[r, bend right] & B_2 \arrow[u, "T"] \end{tikzcd}$$

$$\tilde{F} = T^{-1} F T$$


5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

- **a) [1 Punkt]** Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.
- **b) [2 Punkte]** Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.
- **c) [3 Punkte]** Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0 \iff \exists i \in \{1, n\}$

$\Rightarrow \lambda_i < 0$

Spektralsatz symm. $\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$

b) $x^T A x \underset{\uparrow}{=} x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0$

x EV zu $\lambda_i < 0$

c) $\lambda_i \in \mathbb{C}$, aber λ_i & $\overline{\lambda_i} \in$ EV

a) $\Rightarrow \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_i \overline{\lambda_i}}_{>0} \cdot \ldots \cdot \lambda_j \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$

$\lambda_i \overline{\lambda_i} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 > 0$

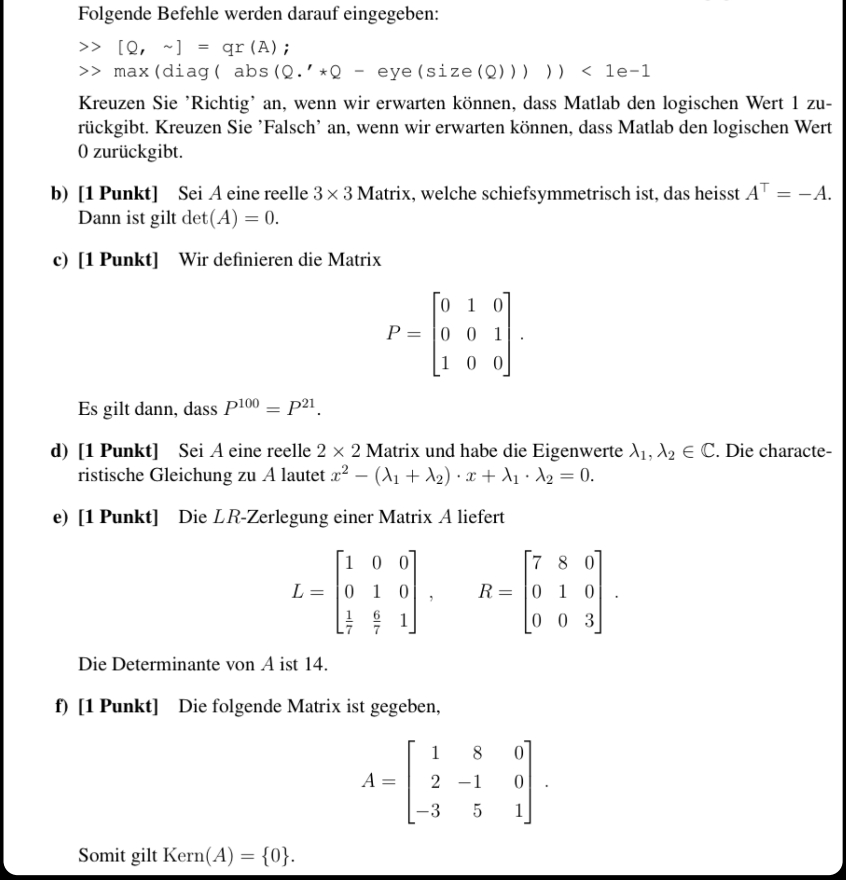
$\Rightarrow \exists \lambda_j \in EV : \underline{\lambda_j < 0}$

b) gilt aus a)

Schur-Zerlegung: $A = SRS^T$

S: orthogonal

R: rechte obere Dreiecksmatrix



6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

$\max(\mathrm{diag}(|Q^TQ - I|)) < 0.1$

$\det(A) = \det L \det R$
$= \det R$

b)

$$\det(A^T) = \left\{ \begin{array}{l} \det(A)^T = \det(A) \\ \det(-A) = (-1)^n \det(A) \end{array} \right\} = 0$$